数理解析研究所講究録
341巻 1978年 93-128

$\mathbb{C}^{n+1}$ の non-degenerate な超曲面に対する $\bar{\partial}$-Neumann 問題と $\Box_b$ の real analytic hypoellipticity について.

京大数研　室政和

$\mathbb{C}^{n+1}$ を $n+1$ 次元の Complex vector space とし. Ω をその relatively compact な領域とする。その境界 $b\Omega$ は real analytic であるとする。今 Ω 上の Dolbeault Complex.

$$0 \to \Lambda^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}} \Lambda^{p,n+1} \to 0$$

を考える。今 ϑ を $\bar{\partial}$ の formal adjoint operator とする。r は $\mathbb{C}^{n+1}$ 上の real analytic な函数で $\Omega = \{r<0\}$ であるものとする。このとき $u \in \Lambda^{p,q}(\Omega)$ に対する次の微分方程式を考える。$b\Omega$ は Ω の境界 $\{r=0\}$ として,

$$\begin{cases} \Box u (= (\vartheta\bar{\partial} + \bar{\partial}\vartheta) u) = 0 & f \in \Lambda^{p,q}(\Omega) \\ \sigma(\vartheta, dr)\, u|_{b\Omega} = 0 & \cdots\cdots ① \\ \sigma(\vartheta, dr)\bar{\partial} u|_{b\Omega} = 0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

ここで $\sigma(\vartheta, dr)$ は ϑ の principal symbol に dr を代入して $b\Omega$ 上の multiplication operator として作用するも

のである。このとき，f が Ω 上の real analytic な section であるとき，u もそうであるか？というのが $\bar{\partial}$-Neumann 問題の real analytic hypoellipticity である。

また，$b\Omega$ 上の boundary complex,

$$0 \longrightarrow \Lambda_b^{p,0} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} \Lambda_b^{p,1} \xrightarrow{\bar{\partial}_b} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_b} \Lambda^{p,n-1} \to 0$$

に対して，ϑ_b を，その formal adjoint operator とするとき，

$$\Box_b u = (\vartheta_b \bar{\partial}_b + \bar{\partial}_b \vartheta_b) u = f \qquad u, f \in \Lambda_b^{p,q}$$

という方程式に対して，f が real analytic ならば，u もそうであるというのが，$\Box_b$ の real analytic hypoellipticity である。

この２つの問題は，密接な関係があるが，ここでは，我々は，$\bar{\partial}$-Neumann 問題を，境界値の間の関係をあらわす，microdifferential operator が $\Box_b$ に帰着されることを示し，その $\Box_b$ が，左右両逆の micro local operator をもつということを調べることに帰着して解くことを試みる。

以下，議論が平行して行えるので，$p=0$ を仮定する。また，local な話なので，r は，原点の近傍で定義された，real analytic な函数で，$r(0)=0$，$|dr|=1$ であるとする。座標変換は，特にことわらぬかぎり Hermite 計量を変えないものとする。

1. 局所座標による境界条件の表示.

原点の近傍Uにおいて. 局所座標 $(z_0,\cdots,z_n)$ $(z_i=x_i+iy_i)$ をとり. $r(0)=0$, $dr(0)=dx_0$ であるとする。$\mathbb{C}\otimes TU$, 及び $\mathbb{C}\otimes T^*U$ を. Uを real $2(n+1)$ manifold とみたときの. tangent bundle 及び. cotangent bundle の complexification とする。また. $\overline{T}^*\subset\mathbb{C}T^*U$ は. $d\bar{z}_0,\cdots,d\bar{z}_n$によって生成される $\mathbb{C}T^*U$ の subbundle とし. T^*はその conjugate space であるとする。すると $\Lambda^{p,q}=(\Lambda^p T^*)\otimes(\Lambda^q \overline{T}^*)$ である。同様に $T,\overline{T}\subset\mathbb{C}TU$ をその dual space として定義する。

U上で定義される $\overline{T}^*$の frame $(\bar{\omega}_0,\cdots,\bar{\omega}_n)$ を次のように定める。$\bar{\partial}r=\bar{\omega}_0$ とし. $\bar{\omega}_1,\cdots,\bar{\omega}_n$ とは直交している。さらに. $(\bar{L}_0,\cdots \bar{L}_n)$ はその dual frame (i.e. $\langle\omega_i,\bar{L}_j\rangle=\delta_{ij}$) とする。このとき, $\Lambda^{0,q}(U)$の frame として.

$$\bar{\omega}_I=\bar{\omega}_{i_1}\wedge\cdots\wedge\bar{\omega}_{i_q}\qquad I=(i_1,\cdots i_q)$$
$$i_1<\cdots<i_q.$$

をとったとき, その添字に0が含まれているものと, 含まれていないものとは直交する。

φを $\Lambda^{0,q-1}$の C_0^∞-section とし. $\varphi=\sum_I \varphi_I\bar{\omega}_I$ とするとき,

$$\bar{\partial}\varphi=\sum_{jI}\bar{L}_j\,\varphi_I\,\omega_j\wedge\bar{\omega}_I\ +(0\text{階以下の作用素})$$

$$= \sum_H \sum_{\{j,I\}=H} \varepsilon_{jI}^H (\bar{L}_j v_I) \bar{\omega}_H + (0\text{階以下})$$

今, $u = \sum_H u_H \bar{\omega}_H \in C^\infty(\Lambda^{0 8}(\bar{U}))$ に対して,

$$(\sigma(\bar{\partial},\eta)v, u) = \int \sum_{H\tilde{H}} \sum_{\{j,I\}=H} \varepsilon_{jI}^H \sigma(\bar{L}_j,\eta) v_I \cdot \bar{u}_{\tilde{H}} a_{H\tilde{H}}\, dV$$

である。ここで $(a_{H\tilde{H}})$ は Hermitian matrix で $dV = \prod_{i=0}^n dx_i \wedge dy_i$ である。これより,

$$(\sigma(\bar{\partial},\eta)v, u) = (v, \sigma(\vartheta,\eta)u)$$

$$= \int \sum_{H\tilde{H}} \sum_{\{j,I\}=H} v_I \overline{\varepsilon_{jI}^H \sigma(\bar{L}_j,\eta) u_{\tilde{H}}}\, a_{H\tilde{H}}\, dV$$

ここで $\eta = dr$ とすると, $j \neq 0$ であるならば $\sigma(\bar{L}_j, dr) = 0$.
$j=0$ ならば $\sigma(\bar{L}_j, dr) = 1$ であるので, $(a_{H\tilde{H}})$ の各成分が, $H\tilde{H}$ の一方が0を含み, 他方がそうでないとき, 0になることを考えると,

$$= \int \sum_{H\tilde{H}} \sum_{\{0,I\}=H} v_I \cdot \overline{\varepsilon_{0I}^H \sigma(\bar{L}_0, dr) u_{\tilde{H}}}\, a_{H\tilde{H}}\, dV$$

したがって, 境界条件 $\sigma(\vartheta, dr) u|_{b\Omega} = 0$ は,

$$\sum_{H\tilde{H}} a_{H\tilde{H}} \varepsilon_{0I}^H u_{\tilde{H}}|_{b\Omega} = 0 \qquad \text{for all } I.$$

ただし, I は 0を含まない位数 $(8-1)$ の添字 $H\tilde{H}$ は 0を

位数 $q+1$ の添字である。 $(a_{H\bar{H}})$ はこのとき，non-singular な Hermitian Matrix であるから．

$$u_{\bar{H}}\big|_{b\Omega}=0 \qquad (\bar{H}\text{ は }0\text{ を含む位数 }q\text{ の添字})$$

と $\sigma(\vartheta, dr)\,u\,|_{b\Omega}=0$ は同値である。

次に，$\sigma(\vartheta, dr)\,\bar{\partial}u\,|_{b\Omega}=0$ という条件を書き直す。先の計算と同様にして，$\bar{\partial}u=\sum_I v_I\,\bar{\omega}_I$ と書けたとき，これは

$$v_I\big|_{b\Omega}=0 \qquad (I\text{ は }0\text{ を含む位数}(q+1)\text{の添字})$$

という条件である。

$u=\sum_J u_J\,\bar{\omega}_J$ と書けたとする。このとき，各 u_J のうち，J が 0 を含んでいる添字ならば，それは real analytic であることがわかる。なぜならばそれは二階の elliptic な方程式をみたし，① の条件より Dirichret 条件が real analytic であるから。したがって，J が 0 を含んでいないもののみについて考えればよい。

$$\bar{\partial}\,u=\sum_J(\bar{L}_0 u_J)\,\bar{\omega}_0\wedge\bar{\omega}_J+\sum_J u_J\,\bar{\partial}(\bar{\omega}_J)$$
$$+\ (\bar{\omega}_0\text{ を含まない terems})。$$

ここで，Σ の J は 0 を含まない位数 q の添字である。

$$\bar{\partial}(\bar{\omega}_j)=\sum_{l=1}^{n}a_j^{0l}\,\bar{\omega}_0\wedge\bar{\omega}_l+(\bar{\omega}_0\text{ を含まない term})。$$

$$[\bar{L}_i, \bar{L}_j] = \sum_{k=0}^{n} a_k^{ij} \bar{L}_k$$

と書けるから.

$$\bar{\partial} u = \sum_J (\bar{L}_0 u_J)\, \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_J + \sum_{JJ'} b_{JJ'}\, u_J\, \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_{J'}$$
$$+ (\omega_0 \text{ を含まない term})$$

と適当に $b_{JJ'}$ をもって来ることによって書ける。この $b_{JJ'}$ を計算するためにここで次のように座標を選ぶ。すなわち境界を定義する函数が,

$$r = 2x_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z_i \bar{z}_i + O(3) \qquad (\varepsilon_i = +1 \text{ or } -1)$$

となるようにする。実際 r は原点の近傍で Levi form が non-degenerate であることより、これは可能である。特に以下では、(Hermite 計量は変わるが本質的に差はないので)

$$1 \leqq i \leqq k \quad \text{ならば}, \qquad \varepsilon_i = +1$$
$$k+1 \leqq i \leqq n \quad \text{ならば}, \qquad \varepsilon_i = -1$$

と仮定して, これを k-strongly pseudo-convex な境界と呼ぶ。この場合に $\bar{L}_j$ $(j = 0, 1, \cdots n)$ 及び $\bar{\omega}_0$ を次のようにとる。

$$\bar{L}_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \qquad \bar{\omega}_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i} \cdot d\bar{z}_i$$

$$\bar{L}_j = \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_j} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} - \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} \qquad j = 1, \cdots, n$$

これを先に定めた座標によって書くと

$$L_0 = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \bar{z}_i \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} + \mathcal{O}(2)$$

$$L_j = \varepsilon_j \bar{z}_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} - \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \mathcal{O}(2)$$

ここで $\mathcal{O}(2)$ とは、係数が原点で2次以上の零点を持つ係数による一階斉次の微分作用素である。さらに、$\{\bar{\omega}_0, \bar{\omega}_1, \cdots \bar{\omega}_n\}$ を T'' の原点の近傍 U における frame で、$\langle \bar{L}_i, \bar{\omega}_j \rangle = \delta_{ij}$ が成り立つように、$\bar{\omega}_1, \cdots, \bar{\omega}_n$ を決める。

A_1 を、位数 g の添字のうち、0 を含んでいるもの全体の集合、A_2 をそうでないものの集合とするとき、方程式の (i) の条件 $\sigma(\vartheta, dr) u|_{b\Omega} = 0$ より

$$u_I |_{b\Omega} = 0 \qquad \text{for all } I \in A_1$$

この条件の成立を仮定したうえで $\sigma(\vartheta, dr) \bar{\partial} u|_{b\Omega} = 0$ の条件を計算してみよう。$[\bar{L}_0, \bar{L}_j] = \bar{L}_0 \bar{L}_j - \bar{L}_j \bar{L}_0 = \varepsilon_j \frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} + \mathcal{O}(1)$ であるから、$\bar{\partial}(\bar{\omega}_J) = \sum_{j \in J} \varepsilon_j \bar{\omega}_J + \mathcal{O}(1)$。したがって

$$\bar{\partial} u = \sum_J \Big(\bar{L}_0 + \sum_{j \in J} \varepsilon_j \Big) u_J \; \bar{\omega}_0 \wedge \bar{\omega}_J + \mathcal{O}(1)$$
$$+ (\bar{\omega}_0 \text{を含まない terms})$$

これより、$\sigma(\vartheta, dr) u|_{b\Omega} = 0$ の条件は、

Kを、A_2に属する添字とするとき，

$$\square_0 u_K + \left(\sum_{j\in K} \varepsilon_j\right) u_K + \sum_{J\in A_2} O_J^K(1)\, u_J \Big|_{b\Omega} = 0$$

と書ける。これより，まとめて書けば，

Proposition 1

$\Lambda^{0,q}$ の原点の近傍における section u を $\bar\omega_0, \cdots, \bar\omega_n$ を fram とする，ベクトル値函数，

$$u = \sum_I u_I \bar\omega^I \qquad I = (i_1, \cdots i_q) \quad 0 \leq i_j \leq n,\ i_1 < i_2 \cdots < i_q$$

とあらわしたとき，boundary condition は次のように書ける。

$$\sigma(\vartheta, dr)\, u|_{b\Omega} = 0 \text{ より} \qquad u_I|_{b\Omega} = 0 \qquad I \in A_1$$

$$\sigma(\vartheta, dr)\, \bar\partial u|_{b\Omega} = 0 \text{ より} \qquad \left(\square_0 + \left(\sum_{j\in I} \varepsilon_j\right)\right) u_I + \sum_{J\in A_2} O_J^I(1)\, u_J \Big|_{b\Omega} = 0 \qquad I \in A_2$$

ここで，A_1 は q コの添字より成る集合で，0を含んでいるものの集合，A_2をそうでないものの集合とする。$O_J^I(1)$ は原点で，一次の zero をもつ real analytic function である。

さて，今まで，$u \in \Lambda^{0 g}$ を $\overline{\omega}_0, \cdots, \overline{\omega}_n$ 及び，その外積を frame とする，ベクトル値函数として，境界条件を計算して来た。以下，これらを，dz_i たち及び，その外積を frame とする，ベクトル値函数に対する境界条件として書き直して見る。

例として $g = 1$ の場合をやって見る。

Σ_0 に直交する T^* の basis として，

$$\overline{\omega}_i = dz_i - \varepsilon_i z_i dz_0 + O(2) \qquad i = 1, \cdots, n$$

と書くことができる。ここで，$O(2)$ は，2次以上の零点をもつ T^* の section である。このとき，

$$\overline{\omega}_0 = dz_0 + \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i z_i dz_i + O(2)$$

これより，frame の変換は，次の matrix によって与えられる。

$$\begin{bmatrix} \overline{\omega}_0 \\ \overline{\omega}_1 \\ \vdots \\ \overline{\omega}_n \end{bmatrix} = I_{n+1} + A(z) + O(2) \begin{bmatrix} dz_0 \\ dz_1 \\ \vdots \\ dz_n \end{bmatrix}$$

と書くことができる。ここで，$A(z)$ は，$z_1 \cdots z_n$ による一次斉次式を成分とする $(n+1) \times (n+1)$ matrix，$O(z)$ は，各係数が，2次以上の零を持つ matrix である。この変換

行列を K と書くことにしよう。このとき，$\Lambda^{0,1}$ の section $u=\sum_{i=0}^{n} u_i\bar{\omega}_i$ を，$(u_0, u_1, \cdots, u_n)$ のベクトル値函数とみるとき，

$$(u_0, u_1, \cdots, u_n) K = (v_0, v_1, \cdots, v_n).$$

となる。したがって，境界条件は，

$$\left\{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & \Gamma_0+\alpha_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma_0+\alpha_n \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & O(1) \end{array}\right)\right\} \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}\Bigg|_{b\Omega}$$

$$= \left\{\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & & & \\ \hline & \Gamma_0+\alpha_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma_0+\alpha_n \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} & \\ \hline & O(1) \end{array}\right)\right\}\left\{ I_{n+1} - {}^tA(z) + {}^tO(z)\right\} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

ここで $A(z) = \begin{array}{cc} 1 & n \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} A_1 & A_2 \\ \hline A_3 & A_4 \end{array}\right)} \end{array}$ 　 $O(z) = \begin{array}{cc} 1 & n \\ \multicolumn{2}{c}{\left(\begin{array}{c|c} O_1(z) & O_2(z) \\ \hline O_3(z) & O_4(z) \end{array}\right)} \end{array}$

と block 分けすると，

$$= \left\{\left(\begin{array}{c|c} 1 - {}^tA_1 + {}^tO_1(z) & -{}^tA_3 + {}^tO_3(z) \\ \hline {}^tA_2\Gamma_0 + {}^tO_2(z)\Gamma_0 & I_n + {}^tA_4 + O_4(z)\Gamma_0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|ccc} & & & \\ \hline & \alpha_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{array}\right)\right.$$

$$+\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline O(1) & O(1) \end{array}\right)\Biggr\}\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\Biggr|_{b\Omega}=0$$

これによって、

$$v_0\Bigr|_{b\Omega}=(1+{}^tA_1+O(2))\left\{({}^tA_3+{}^tO_3(2))\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\right\}\Biggr|_{b\Omega}$$

$$=\quad O(1)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\Biggr|_{b\Omega},$$

と書ける。一方、

$$\left({}^tA_2\bar{L}_0+{}^tO_2(2)\bar{L}_0+O(1)\right)v_0\Bigr|_{b\Omega}+\left(I_n+{}^tA_4+O_4(2)\bar{L}_0+\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}+O(1)\right)\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\Biggr|_{b\Omega}$$

$$=0$$

上の条件を、下の条件に代入することによって、

$$\left\{(I_n+O(1))\bar{L}_0+\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}+O(1)\right\}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\Biggr|_{b\Omega}=0$$

よって $(I_n+O(1))^{-1}$ を左からかけることによって、

$$\left\{\bar{L}_0+\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}+O(1)\right\}\begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}\Biggr|_{b\Omega}=0$$

という境界条件が得られた。この条件により，$(v_1, \cdots, v_n)$ の Dirichrét data が real analytic であることが示されれば，先の条件により v_0 の Dirichrét data もまた real analytic であるので問題は次のようになる。
(8>1でも同様の計算ができる)

Proposition 2

$v = \sum v_I d\bar{z}_I$ を Λ^{0q} の原点の近傍での section とすると，

$$(1) \begin{cases} \square v = f \\ \sigma(\vartheta, dr)\, v \,|_{b\Omega} = 0 \\ \sigma(\vartheta, dr)\, \bar{\partial} v \,|_{b\Omega} = 0 \end{cases}$$

は

$$(2) \begin{cases} \square v_{I_j} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} v_{I_j} = f_{I_j} \quad \text{for all } I_j \in A_q \\ \left\{ \begin{bmatrix} L_0 + \alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & L_0 + \alpha_{I_m} \end{bmatrix} + O(1) \right\} \begin{pmatrix} v_{I_1} \\ \vdots \\ v_{I_m} \end{pmatrix} \Bigg|_{b\Omega} = 0 \quad , m = \binom{n}{q}. \end{cases}$$

という方程式の Dirichrét data $v_I|_{b\Omega}$ が real analytic であれば，(1) のすべての Dirichrét data が real analytic であることが導かれる。ここで $\alpha_{I_i} = \sum_{j \in I_i} \varepsilon_j$ である。

したがって，我々は (2) の方程式を考えればよい。v_{I_j} た

ちは、すべて、$\Box v_{I_j}=f_{I_j}$ という二階の線型楕円型微分方程式をみたすのであるから、f_{I_j} が real analytic であるとき、v_{I_j} の $b\Omega$ への Dirichrét data が real analytic であれば、v_{I_j} は real analytic である。ゆえに、我々は、$I_j \in A_2$ であるような v_{I_j} について、その Dirichrét data は real analytic であることを示せばよい。

2. 境界値のみたす関係。

以下では、Proposition 2 における (2) の方程式に限って論じ、境界値は hyperfunction solution に対する、小松-河合の境界値と解する。(distribution あるいは C^∞-函数の solution を考えても、これは、小松-河合の境界値と一致する。) Prop. 2 の (2) の方程式の境界値と $(v_{I_1} \cdots v_{I_m})$ の Dirichrét 境界値の間には、real analytic function on $b\Omega$ を係数として、ひとつの関係式が存在している。(柏原-河合 [3][5], 片岡 [6]) すなわち、各々の境界値を $\sqrt{-1}S^*b\Omega$ ($b\Omega$ の cosphere bundle) 上の micro function とみたとき、境界値の間の関係は、micro-differential operator で書ける。これが invertible であるなら

Prop. 2 の (2) の境界値が microfunction として 0（hyperfunction として real analytic）であれば Dirichlet data もそうであることがわかる。

以下、それを説明しよう。

$$\begin{cases} b_1 = \Gamma_0 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \\ b_0 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} c_0 = 1. \\ c_1 = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial r}{\partial \bar{z}_i}\cdot\frac{\partial}{\partial z_i} + \frac{\partial r}{\partial z_i \partial \bar{z}_i} \end{cases}$$

とおく。このとき $\{b_0, b_1\}$ に対して，$\{c_0, c_1\}$ は □ の相対境界作用素系である。（i.e.， $u \in C^\infty(\bar{\Omega})$ に対して，

$\Box\,(\theta(r)\cdot u) = \theta(r)\,\Box u + c_0\,\delta(r)\,(b_1 u) + c_1\,(\delta(r)\,b_0 u)$。ここで $\Box = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}$。）

今 u は $\Box u = f$ をみたす Ω 上の hyperfunction f は $\bar{\Omega}$ 上の analytic function とする。$v_1 = \Gamma_0 u|_{b\Omega}$ 及び，$v_0 = u|_{b\Omega}$ を小松-河合の意味の u の境界値とする。このとき，$r<0$ で u に等しく，$r>0$ で 0 となる hyperfunction F on U がユニークに存在して，

(3) $\Box F = h = \theta(r) f + c_1\,(v_0\cdot\delta(r)) + c_0\,(v_1\,\delta(r))$

となる。

X を $\mathcal{V}$ の complexification $N=\{r=0\}\subset \mathcal{V}$ とするとき，$(r, x_1, \cdots, x_{2n+1})$ を $\mathcal{V}$ 上のひとつの（real manifold とみたときの）局所座標であるとするとき，

$$S^*_N X = G_+ \sqcup G_- \sqcup \sqrt{-1}\, S^*\mathcal{V} \underset{\mathcal{V}}{\times} N\text{。}$$

これは $S^*_N X$ を座標系 $\begin{pmatrix} \sqrt{-1}\lambda_1+\lambda_2, & x_1, & \cdots, & x_{2n+1} \\ & \sqrt{-1}\xi_1, & & ,\sqrt{-1}\xi_{2n+1}\end{pmatrix}$ で書くとき，$\lambda_1=0$ で $\sqrt{-1}\, S^*\mathcal{V}\times_{\mathcal{V}} N$ をあらわし，$\lambda_2>0$ が G_+ $\lambda_2<0$ が G_- をあらわしている。$S^*_N X$ 上の holomorphic parameter $\sqrt{-1}\lambda_1+\lambda_2$ を持った micro function の sheaf. $C_{N/X}=\mathcal{H}^n_{S^*_N X}(\pi^{-1}_{N/X}\mathcal{O}_X)^a$ を考える。（柏原-河合 [3][5]）このとき，$h = C_1(v_0\delta(r)) + C_0(v_1\delta(r))$ は，$C_{N/X}$ の section として埋め込むことができる。一方 F は，Ω 上 real analytic で，support は $\bar{\Omega}$ に含まれるので，$C_{N/X}$ の G_+ 上の section と同一視できる。（片岡 [6]）v_0, v_1 が $F\in C_{N/X}$ をもって，$\square F = h$ と書けるということは，(3) が G_+ 上の $C_{N/X}$ に対する方程式として解くことができるということに、ほかならない。

今，$\square$ は $\{r=0\}$ について non-characteristic である。したがって v_0, v_1 が real analytic であるならば，Cauchy-Kowalevski の定理によって保証されている。言いかえると $C_1(v_0\delta(r)) + C_0(v_1\delta(r))$ の singular support

が, $G_+ \cap \{\xi_1 = \cdots = \xi_{2n+1} = 0\}$ に含まれているならば, 常に解ける。これを我々の立場で言えば, □ が $\{r=0\}$ について非特性的であるから $G_+ \cap \{\xi = 0\}$ 上では, (□ の symbol は消えず, したがって) □ は invertible であるから, ということである。 $G_+ \cap \{\xi \neq 0\}$ 上, (すなわち, v_0, v_1 を micro function と考えたとき) v_0, v_1 は任意に与えることはできない。ここにあらわれるのが境界値のみたす関係式である。

$$\square = (D_r - \alpha)(D_r - \beta) A$$

という micro differential operator の分解が, $\sqrt{-1}S^*b\Omega$ の原点の fiber 上の各点の近傍でできる。ただし, A は 0階の elliptic, α, β は一階の micro differential operators で, $[r, \alpha] = 0$, $[r, \beta] = 0$ をみたし, さらに, $(D_r - \alpha)$, $(D_r - \beta)$ は各々 G_-, G_+ において, elliptic である。(S-K-K [4]) 一方 C_1 は一階の微分作用素で,

$$C_1 = (D_r + \delta) B$$

と書ける。ここで, B は non-zero function δ は一階の微分作用素で $[r, \delta] = 0$ をみたす。すると,

$$h = (D_r+\delta)B(v_0\delta(r)) + C_0(v_1\delta(r))$$

$$= (D_r-\alpha+(\alpha+\delta))B(v_0\delta(r)) + C_0(v_1\delta(r))$$

$$= (D_r-\alpha)\underbrace{}_{B(v_0\delta(r))} + \{(\alpha+\delta)B\cdot v_0 + C_0 v_1\}\delta(r)$$

これより，

$$\square^{-1}h = A^{-1}(D_r-\beta)^{-1}B(v_0\cdot\delta(r))$$

$$+ A^{-1}(D_r-\beta)^{-1}(D_r-\alpha)^{-1}(\{(\alpha+\delta)B\cdot v_0 + C_0 v_1\}\delta(r))$$

ここで $(\alpha+\delta)$, B, C_0 などは $r=0$ に制限して考える。（これらは D_r を含んでいないのでそれが可能）このとき，$A^{-1}(D_r-\beta)^{-1}B$ は G_+ 上 micro differential operator として定義されるので $\square^{-1}h=\cdots$ の右辺の第一項は $C_{N/X}$ の section に入っている。ところが，その次の項は $(D_r-\alpha)^{-1}$ が G_+ で micro differential operator にならないので，もし（micro function として）

$$(\alpha+\delta)B\big|_{r=0}v_0 + C_0\big|_{r=0}v_1 \neq 0.$$

であるならば，$\square^{-1}h$ は $C_{N/X}$ の section に入らない。ゆえに，

$$(\alpha+\delta)v_0 + C_0 v_1 = 0$$

が、求める G_r における境界値のみたす関係式である。

これを実際に、Prop. 2. の (2) の方程式に適用する。$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{I_1} \\ \vdots \\ \psi_{I_m} \end{pmatrix}$ に対して、$\Gamma_0 \psi|_{b\Omega} = \begin{pmatrix} \psi_1^1 \\ \vdots \\ \psi_m^1 \end{pmatrix} = \psi^1$ $\psi|_{b\Omega} = \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \vdots \\ \psi_m^0 \end{pmatrix} = \psi^0$ と境界値を書くとする。このとき、

$$\psi^1 = C_0^{-1}(\alpha+\delta) B \psi^0$$

と書ける。一方で Prop. 2 の (2) の境界条件は、

$$\left\{ \begin{bmatrix} \Gamma_0 + \alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \Gamma_0 + \alpha_{I_m} \end{bmatrix} + O(1) \right\} \begin{pmatrix} \psi_{I_1} \\ \vdots \\ \psi_{I_m} \end{pmatrix} \Bigg|_{b\Omega} = 0$$

であったから、先の式を代入することによって、

$$\left\{ C_0^{-1}(\alpha+\delta) B \cdot I_m + \begin{bmatrix} \alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{I_m} \end{bmatrix} + O(1) \right\} \begin{pmatrix} \psi_1^0 \\ \vdots \\ \psi_m^0 \end{pmatrix} = 0$$

という、ψ^0 に対する条件が導き出された。（ここで α と α_{I_j} たちとは全く別のものである。）我々は、この operator に

対する hypoellipticity を調べればよい。

Proposition 3

$(\alpha+\delta)|_{r=0}$ は $b\Omega$ 上の micro differential operator で、一階、原点の fiber 上では、$(0, +\sqrt{-1}\,dy_0\infty) \in \sqrt{-1}\,S^*b\Omega$ を除いて、各点の近傍で elliptic operator である。

U 上の局所座標 $(z_0, \cdots, z_n)$ $(z_i = x_i + \sqrt{-1}\,y_i)$ を実座標と見て、$\sqrt{-1}\,S^*U$ の座標を $\begin{pmatrix} x_0, y_0, \cdots, x_n, y_n \\ \sqrt{-1}\,\xi_0, \sqrt{-1}\,\eta_0, \cdots, \sqrt{-1}\,\xi_n, \sqrt{-1}\,\eta_n \end{pmatrix}$ ととる。

原点の fiber 上では、$\square$ の principal symbol は $\sum_{i=0}^{n} \xi_i^2 + \eta_i^2$，$D_n$ のそれは ξ_0，したがって α のそれは $\sqrt{-1}\sqrt{\eta_0^2 + \sum_{i=1}^{n}(\xi_i^2+\eta_i^2)}$，また δ のそれは，$-\sqrt{-1}\,\eta_0$。したがって，$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2+\eta_i^2 \neq 0$ であるなら $\alpha+\delta$ の principal symbol は消えず，$\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2+\eta_i^2 = 0$ であっても，$\eta_0 = -dy_0$ の点では principal symbol は消えない。消えるのは $\eta_0 = dy_0$ のみ。

したがって，

$$C_0^{-1}(\alpha+\delta)B+\begin{bmatrix}\alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{I_m}\end{bmatrix}+O(1)$$

という $m\times m$ matrix の一階の micro differential operator は、$(0, +\sqrt{-1}dy_0\infty)$ を除いた原点の fiber の各点の近傍で elliptic operator である。

今度は実際に、$(0, \sqrt{-1}dy_0\infty)$ においても、この operator が、(micro function に作用する operator) として、invertible であることを見たい。

C_0, B, は原点において、1 の値をとる函数であるので我々は、

$$(4)\qquad (\alpha+\delta)\big|_{r=0}+\begin{bmatrix}\alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{I_m}\end{bmatrix}+O(1)$$

の hypoellipticity を、$(0, \sqrt{-1}dy_0\infty)$ の近傍で調べればよい。以下、

$$\tilde{\delta}=\delta\big|_{r=0}+\begin{bmatrix}\alpha_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_{I_m}\end{bmatrix}+O(1)$$

とおく。(4) の作用素そのままを調べるのは困難であるので、これに適当な elliptic な operator をかけて考える。

□は、二階の微分作用素であったから、

$$\square = (D_r-\alpha)(D_r-\beta)A \quad \cdots\cdots\cdots\cdots [1]$$

と分解されたことを思い出そう。$(D_r-\alpha)$, $(D_r-\beta)$ は、各々 G_-, G_+ で elliptic な一階の micro differential operator である。この場合、D_r の係数を比較することによって、A は non-zero function である。

この表示式 [1] において、D_r に $-\tilde{\delta}$ を代入して、$r=0$ に制限して得られる micro differential operator

$$\square\big|_{D_r\to\tilde{\delta}} = (-\tilde{\delta}-\alpha)(-\tilde{\delta}-\beta)A\big|_{r=0} \quad \cdots\cdots [2]$$

を考えるとき、$(-\tilde{\delta}-\beta)|_{r=0}$ は $(0, +\sqrt{-1}dy_0\infty)$ において elliptic な作用素であることは、$(-\tilde{\delta}-\alpha)|_{r=0}$ が $(0,-\sqrt{-1}dy_0\infty)$ において elliptic であることと同様にして示される。したがって、[2] の作用素の $(0, +\sqrt{-1}dy_0\infty)$ における invertibility は、$(-\tilde{\delta}-\alpha)$, すなわち (4) の作用素の invertibility と全く同じことである。よって [2] を考察すればよい。

$$\begin{aligned}[2] &= (-\tilde{\delta}-\alpha)(-\tilde{\delta}-\beta)A\,|_{r=0}\\ &= (\tilde{\delta}^2+\alpha\tilde{\delta}+\tilde{\delta}\beta+\alpha\beta)A\,|_{r=0}\\ &= (\tilde{\delta}^2+\tilde{\delta}(\alpha+\beta)+\alpha\beta+[\alpha,\tilde{\delta}])A\,|_{r=0}\end{aligned}$$

一方

$$\Box = (D_r - \alpha)(D_r - \beta)A$$
$$= (D_r^2 - D_r(\alpha+\beta) + \alpha\beta + [D_r\alpha])A \quad \text{—— [3]}$$

であるので,

$$[2] = ([3]\text{の表示式に},\ D_r\text{ に }-\tilde{\delta}\text{ を代入したもの})|_{r=0}$$
$$+ ([\alpha, \tilde{\delta}] - [D_r\alpha])A\,|_{r=0} \quad \text{—— [4]}$$

とあらわされることがわかる。我々は、[4] の operator の invertibility を調べればよい。

[4] の operator の principal symbol は □ の principal symbol

$$\sigma(\Box) = (\sigma(D_r)^2 - \sigma(P)\sigma(D_r) + \sigma(Q))A.$$

(ここで $P = \alpha+\beta$, $Q = \alpha\beta$) の $\sigma(D_r)$ に $-\delta$ の principal symbol $-\sigma(\delta)$ を代入して得られるものの対角成分に並べたものである。これについて次のような定理が得られる。

Theorem 4

[4] の operator の principal symbol は $(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)$ の近傍において，適当な fiber preserving な quantized Contact transformation Φ によって，

$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} Z_i\bar{Z}_i + \bar{Z}_i Z_i + \sum_{ij} A_{ij} Z_i \bar{Z}_j$$

の principal symbol に変換される。ここで，

$$\begin{cases} Z_i = \dfrac{\partial}{\partial z_i'} + \sqrt{-1}\,\bar{z}_i' \dfrac{\partial}{\partial y_0'} \\ \bar{Z}_i = \dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_i'} - \sqrt{-1}\, z_i' \dfrac{\partial}{\partial y_0'} \end{cases} \qquad \Phi(0, dy_0\infty) = (0, dy_0'\infty)$$

であり．A_{ij} は原点の fiber で principal symbol が消える．0 階の micro differential operators で，$\sigma(\bar{A}_{ij}) = \sigma(A_{ji})$ をみたすものである。

これは．次のようにして示される。まず．

$$\Box = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial}{\partial z_i}\cdot\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} = \left(\frac{\partial}{\partial z_0}, \cdots \frac{\partial}{\partial z_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}$$

そこで．$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_0} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial \bar{z}_n} \end{pmatrix}$ を Hermite 行列で変換したものを．

$H\left(\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}_0}\right) = \begin{pmatrix} P_0 \\ \vdots \\ P_n \end{pmatrix} = P$ と書く。このとき，$P_1 \cdots P_n$ は D_r と直交しているようにとる。このとき，□ の principal symbol は $\sum_{i=0}^{n} \sigma(\bar{P}_i)\sigma(P_i)$ である。

U上の Cauchy-Riemann系 の $b\Omega$ 上への接方程式系（すなわち，$\bar{T}$ の section のうち dr と直交する section を $b\Omega$ に制限することによって得られる方程式系）を $\bar{T}^*$ と書くことにしよう。このとき，各 P_i $(i=1,\cdots n)$ は $\bar{T}^*$ の section である。なぜならば，$P_1 \cdots P_n$ は D_r と直交しているから dr とも直交している。したがってその $b\Omega$ への制限は $\bar{T}^*$ に入る。しかも $\bar{T}^*$ は n 次元であるので $P_1,\cdots,P_n$ によって生成される。

次に P_0 を考えよう。$\bar{P}_0 = C(D_r + \lambda)$ と書ける。ここで C は non zero function λ は D_r を含まない（したがって dr と直交する）一階斉次の微分作用素である。これは T における $\bar{P}_1,\cdots,\bar{P}_n$ の Hermite 内積による直交補空間であるので，$\bar{P}_0$ の生成する subbundle は C_1 の principal part の生成する subbundle と同じである。

したがって，$\sigma(C_1) = (\sigma(D_r) + \sigma(\delta))B$，$\sigma(\bar{P}_0) = C(\sigma(D_r) + \sigma(\lambda))$ より，$\sigma(\bar{P}_0)$ の $\sigma(D_r)$ に $\sigma(\delta)$ を代入すると消える。

したがって

[4] の作用素の principal symbol は，$\sum_{i=1}^{n} \sigma(P_i)\sigma(\overline{P_i})$ と書ける。

一方，S-K-K [4] によれば，$(0, \sqrt{-1}\,dy_0 \infty)$ の近傍で，適当な fiber preserving な quantized contact transformation を行うことによって，$\mathcal{T}^*$ の生成元は，$\overline{Z_i} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} - \sqrt{-1} z_i \frac{\partial}{\partial y_0}$　$i = 1, \cdots, n$　とすることができる。したがって示された。

Theorem 5

Theorem 4 の変換をほどこしたとき，[4]の作用素の一階の symbol を K としたとき，

$$K \Big|_{(0,+\sqrt{-1}dy_0\infty)} = \sqrt{-1} \begin{bmatrix} \beta_{I_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_{I_m} \end{bmatrix}$$

と書ける。　ここで，$\beta_{I_k} = \sum_{j \in I_k} \varepsilon_j - \sum_{j \in I_k^c} \varepsilon_j$，$I_k \cup I_k^c = \{1, \cdots n\}$，$I_k \cap I_k^c = \phi$。

これは fiber preserving な quantized contact transformation によって，subprincipal symbol は不変なことを利用して，実際に計算してみることによって得られるが

くわしく書くと長くなるので省略する。

3. $b\Omega$ 上の Heisenberg group の構造と不変微分作用素の analytic hypoellipticity。

以下では、Folland-Stein [1] の方法を、超局所化する。ことによって、ある double characteristic な作用素の左右両逆の micro local operator を作る。

$M=\{(y_0, z_1, \cdots, z_n)\}$ 上に、次の結合によって、Heisenberg group の構造を入れる。

$X=(y_0, z_1, \cdots, z_n)$ $X'=(y_0', z_1', \cdots z_n')$ $(z_i=x_i+\sqrt{-1}y_i,$ $z_i'=x_i'+\sqrt{-1}y_i')$ に対して、

$$X\circ X'=(y_0+y_0'+2\sum_{i=1}^{n}(-x_i y_i'+x_i'y_i),\ z_1+z_1', \cdots, z_n+z_n')$$

このとき、M 上の左不変な微分作用素は、

$$\begin{cases} Z_j=\dfrac{\partial}{\partial z_j}+\sqrt{-1}\,\bar{z}_j\dfrac{\partial}{\partial y_0} \\ \bar{Z}_j=\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}_j}-\sqrt{-1}\,z_j\dfrac{\partial}{\partial y_0} \qquad j=1, \cdots n \\ T=\dfrac{\partial}{\partial y_0} \end{cases}$$

によって生成される。このとき，次のような交換関係が成立している。

$$[Z_j, \bar{Z}_k] = -2\sqrt{-1}\,\delta_{ij}\,T$$

$$[T_j, Z_k] = [\bar{Z}_j, \bar{Z}_k] = [Z_j, T] = [\bar{Z}_j, T] = 0$$

Theorem 6

$$\mathcal{L}_\alpha = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(Z_i\bar{Z}_i + \bar{Z}_i Z_i) + \sqrt{-1}\,\alpha\, T \qquad (\alpha \in \mathbb{C})$$

とする。これに対して，

$$\Psi_\alpha(y_0, z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-\alpha}{2}\right)}{2^{2-2n}\,\pi^{n-1}}\left(|z|^2 - \sqrt{-1}\,y_0\right)^{-\frac{n+\alpha}{2}}\left(|z|^2 + \sqrt{-1}\,y_0\right)^{-\frac{n-\alpha}{2}}$$

は，$(0, +\sqrt{-1}\,dy_0\infty)$ (resp. $(0, -\sqrt{-1}\,dy_0\infty)$) の近傍において，$\alpha \neq -n, -(n+2), \cdots\cdots$ (resp. $\alpha \neq n, n+2, \cdots$) であれば holomorphic parameter α をもつ microfunction として well defined であり，

$$\mathcal{L}_\alpha \cdot \Psi_\alpha(y_0, z) = \delta(y_0, z)$$

である。

証明は、次のようにして行う。すなわち、まず、$\alpha \neq \pm n, \pm(n+2) \cdots$ であるならば、直接計算することによって、$\Psi_\alpha(y_0, z)$ は、$\mathcal{L}_\alpha$ によって $\mathcal{L}_\alpha \cdot \Psi_\alpha = \delta(y_0, z)$ という関係式をみたす。(Folland-Stein [1]) 次に、Ψ_α の singular support を考える。$(|z|^2 - \sqrt{-1}\,y_0)^\mu$、及び $(|z|^2 + \sqrt{-1}\,y_0)^\lambda$ という hyperfunction は、$\mu \neq 0, 1, 2, \cdots$ あるいは、$\lambda \neq 0, 1, 2, \cdots$ のとき、$(0, +\sqrt{-1}\,y_0 \infty)$ 及び、$(0, -\sqrt{-1}\,y_0 \infty)$ にのみ Singular support を持つ hyperfunction であり、またその他の場合には、全く singular support を持たない。したがって、Ψ_α は、$\alpha \neq \pm n, \pm(n+2), \cdots$ のとき holomorphic parameter を持つ microfunction として well defined であるが、$\alpha = n, (n+2), \cdots$ へは、$(0, +\sqrt{-1}\,dy_0 \infty)$ の近傍でしか、また、$\alpha = -n, -(n+2), \cdots$ へは、$(0, -\sqrt{-1}\,dy_0 \infty)$ の近傍でしか、(microfunction として) α について解析接続できない。また、解析接続できれば、それが再び $\mathcal{L}_\alpha \cdot \Psi_\alpha = \delta$ をみたすことは明らかである。

以下、同じことなので、$\alpha \neq -n, -(n+2), \cdots$ とし、$(0, \sqrt{-1}\,dy_0 \infty)$ の近傍で考えることにする。

$$K_\alpha f = \int \Psi_\alpha\left((y', z')^{-1} \circ (y_0, z) \right) f(y_0', z')\, dV(y_0', z')$$

と定義する。ここで $dV(y_0, z)$ は M 上の不変測度で $= dy_0 \wedge dx_1 \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy_n$ で与えられる。f は $(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)$ の近傍で定義された microfunction の section である。するとこれは、M 上の左不変な microlocal operator である。しかも、

$$\mathcal{L}_\alpha \cdot K_\alpha\, f = f \qquad f \in \mathcal{C}_{(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)}$$

($\mathcal{C}_{(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)}$ は $(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)$ の近傍で定義された microfunction の section の集合である) であるので K_α は $\mathcal{L}_\alpha$ の右逆作用素，同様にして，

$$K_\alpha \cdot \mathcal{L}_\alpha \cdot f = f \qquad f \in \mathcal{C}_{(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)}$$

であることも容易に確かめることができる。ゆえに

<u>Proposition 7.</u>

Theorem 6 の $\mathcal{L}_\alpha$ は $\alpha \neq -n, -(n+2), \cdots$ (resp. $\alpha \neq +n, +(n+2), \cdots$) であるならば，$(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)$ (resp. $(0, -\sqrt{-1}\,dy_0\infty)$) の近傍で左右両逆の microlocal operator をもつ。

ここで Theorem 4, 及び 5, によって我々の得た作用

素[4]がどのようなものであったかを思い出そう。すなわち、それは、$(0, \sqrt{-1}dy_0\infty)$ の近傍で定義され、

$$(5)\quad \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{-\beta_{I_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & -\mathcal{L}_{-\beta_{I_m}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum_{ij} A^1_{ij} z_i \bar{z}_j & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{ij} A^k_{ij} z_i \bar{z}_j \end{bmatrix} + \Theta_{ij}$$

であった。ここで、A^k_{ij} は 0 階斉次の micro differential operator で、$(0, +\sqrt{-1}dy_0\infty)$ において symbol が消えるもの、Θ_{ij} は $-$階の micro differential operator でその principal symbol は、$(0, \sqrt{-1}dy_0\infty)$ で消えるものである。さらに、$\beta_{I_1}, \cdots, \beta_{I_m}$ の値はそれぞれ、

$$\beta_{I_k} = \sum_{j\in I_k} \varepsilon_j - \sum_{j\in I_k^c} \varepsilon_j$$

であらわされた。（c は、$\{1, \cdots n\}$ の中での補集合をあらわす。）$J = \{1, \cdots k\}$, $J^c = \{k+1, \cdots, n\}$ とおくと、$j \in J$ ならば、$\varepsilon_j = +1$, $j \in J^c$ ならば、$\varepsilon_j = -1$ である。これより

$$\beta_{I_k} = \#\{J \cap I_k\} - \#\{J^c \cap I_k\} - \#\{J \cap I_k^c\} + \#\{J^c \cap I_k^c\}.$$

(#は、集合の位数をあらわす。) したがって、$-n \leqq \beta_{I_k} \leqq n$ で、

$$\beta_{I_k} = -n \iff J = I_k^c$$

$$\beta_{I_k} = n \iff J = I_k \quad 。$$

今の場合、$\#\{I_k\} = q$ であるので、もし $\beta_{I_k} = -n$ であるときは、$\#\{J^c\} = q$ であり、$\beta_{I_k} = n$ のときは $\#\{J\} = q$ である。

これより、

<u>Proposition 8</u>

(5)の作用素の"top"の項 $\begin{bmatrix} \mathcal{L}_{-\beta_{I_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathcal{L}_{-\beta_{I_m}} \end{bmatrix}$ は、$q \neq n-k$ であれば、invertible な microlocal operator であり、$q = n-k$ であれば、そうではない。(実際 $\mathcal{L}_{+n}$ は $(0, \sqrt{-1}\,dy_0\infty)$ に singular support を持つ microfunction $(|z|^2 - \sqrt{-1}\,y_0)^{-n}$ を消す。)

4. 境界作用素と $\square_b$ の逆作用素の構成。

以下では、Heisenberg group の構造を利用して、前節で求めた(5)の作用素の逆作用素を作ることを考える。しか

し、この方法では、まだ、その収束が示されない。

その前に、(5)の作用素と、$\Box_b$ の関係にふれておく。すでに Folland - Stein [1] で扱われているように、(彼らは、$\mathbb{C}^{n+1}$ の中の境界ではなく、一般の non-degenerate な Levi form を持つ CR manifold を扱っているが)、$\Box_b$ も、てきとうな fiber preserving な contact transformation によって (5) の形の作用素に reduce できることは容易に示すことができる。したがって、(5) の形の作用素の invertibility のみが問題である。

以下、$b\Omega$ と M と同一視して、同じ座標 $(y_0, z_1, \cdots z_n)$ を使う。

φ と ψ を、M 上の hyperfunction であるとする。

$$\varphi(\alpha y_0, \alpha^{\frac{1}{2}} z) = \alpha^{\lambda} \varphi(y, z) \qquad \lambda \in \mathbb{C}$$

となるとき、φ を、λ- homogeneous であるという。φ ψ を、各々、λ_1, λ_2 homogeneous であるとするとき、

1) $\varphi * \psi = \int \varphi((y_0', z')^{-1} \circ (y_0, z)) \psi(y_0', z') \, dV(y_0', z')$

は、$\lambda_1 + \lambda_2 + (n+1)$ homogeneous である。

2). $T\varphi$ は λ_1-1 次 homogeneous $T^{-1}\varphi=\int_0^t \varphi(t',\xi)dt'$ は λ_1+1 次 homogeneous, $Z_i\varphi$, $\bar{Z}_i\varphi$ は $\lambda_1-\frac{1}{2}$ homogeneous である。

$$P_\alpha u = a_\alpha(y_0,\xi)\int U_\alpha((y_0',\xi')^{-1}\circ(y_0,\xi))\,u(y_0',\xi')\,dV(y_0',\xi')$$

という microlocal operator P_α を考えよう。$a_\alpha(y_0,\xi)$ は (y_0,x,y) について real analytic な原点の近傍で定義された函数, U_α は M 上の α homogeneous function とする。P_α と $P_{\alpha'}$ の結合は,

$$P_\alpha\circ P_{\alpha'} = a_\alpha(y_0,\xi)\int U_\alpha((y_0',\xi')^{-1}\circ(y_0,\xi))\,a_{\alpha'}(y',\xi')$$
$$\times U_{\alpha'}((y_0'',\xi'')^{-1}\circ(y_0',\xi'))\,dV_{(y_0',\xi')}$$

と書ける。今, $(\tilde{y}_0,\tilde{\xi})=(y_0',\xi')^{-1}\circ(y_0,\xi)$ とするとき,

$$\begin{cases} y_0' = y_0-\tilde{y}_0+2\sum_{i=1}^n(-\tilde{y}_i x_i+\tilde{x}_i y_i) \\ y_i' = y_i-\tilde{y}_i \\ x_i' = x_i-\tilde{x}_i \end{cases} \qquad i=1,\cdots,n$$

$$\begin{cases} \tilde{y}_0 = -y_0'+y_0+2\sum_{i=1}^n(y_i'x_i-x_i'y_i) \\ \tilde{y}_i = -y_i'+y_i \\ \tilde{x}_i = -x_i'+x_i \end{cases} \qquad i=1,\cdots,n$$

であるので、これらを利用して書きかえると、てきとうな M の原点で定義された real analytic functions $b_\gamma(y_0,\xi)$, γ次 homogeneous functions U_γ をもって

$$P_\alpha \cdot P_\alpha' = \sum_\gamma b_\gamma(y_0,\xi)\, U_\gamma\big((y_0'',\xi'')^{-1}\cdot(y_0,\xi)\big)$$

と書ける。γ の最低次の項は $\alpha+\alpha'+n+1$ で、各 γ は $\gamma+\frac{1}{2}m$ (m は整数) の形のものである。

今、$U = U_1 + U_2$;

$$U_1 = \begin{bmatrix} -\mathcal{L}_{-\beta_{I_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & -\mathcal{L}_{-\beta_{I_m}} \end{bmatrix}$$

$$U_2 = \begin{bmatrix} \sum_{ij} A^1_{ij} Z_i \bar{Z}_j & & \\ & \ddots & \\ & & \sum_{ij} A^m_{ij} Z_i \bar{Z}_j \end{bmatrix} + B + (0\text{階以下})$$

B の各成分 B_{ij} は一階斉次の micro differential operator で、

$$B_{ij} = \sum_{k=1}^{n} B_k^{ij} Z_k + \sum_{k=1}^{n} C_k^{ij} \bar{Z}_k + D^{ij} T,$$

B_k^{ij}, C_k^{ij} は 0階の micro diff. op. D^{ij} は原点の fiber で symbol の消える 0階の micro differential operators.

A_{ij}^{k} は、0階の micro differential op. で、原点の fiber 上で、symbol が消えるもの。

という micro differential operator を考える。(5) の作用素は、実際、このような形になる。

U のうち、U_1 に対しては、$K_\beta = \begin{bmatrix} K_{\beta_{I_1}} & & \\ & \ddots & \\ & & K_{\beta_{I_m}} \end{bmatrix}$ が、左右両逆作用素として存在している。したがって、

(6) $$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-U_2 K_\beta\right)^n.$$

が、micro local operator として収束してればよい。

$-U_2 K_\beta$ は先の方法で、M 上の homogeneous な hyperfunction を kernel とする micro local operator の和としてあらわすことができる。その最低次の homogeneous order は、$(-n-1)$ である。したがって、その結合についても、その最低次の term の order は $(-n-1)$ である。(6) の作用素は実際は収束するものと思われるが、まだ証明に成功していない。

参考文献

[1] Folland,G,B and E,M,Stein ; Estimates for the $\bar{\partial}_b$-Complex and Analysis on the Heisenberg Group, Comm. Pure. Appl. Math. Vol.27, 429 - 522 (1974)

[2] Folland,G,B and Kohn,J,J ; The Neumann Problem for the Cauchy-Riemann Complex, Ann. of Math. Studies 75.

[3] Kashiwara,M and T,Kawai ; On the Boundary Value Problem for Elliptic system of Linear Differential Equations I,II . Proc. Japan. Acad. 48, 712-715 (1972) and 146-168 (1973)

[4] Sato,M ,T,Kawai and M Kashiwara (S-K-K) ; Micro functions and Psuedo differential operators, Springer Lecture Note No. 287 .

[5] 柏原正樹, 河合隆裕 楕円型境界値問題の理論とその応用, 数理研講究録 238, 1 − 59 (1975)

[6] 片岡清臣, 超函数のラドン変換とその応用 (東大修士論文) (1976)